CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 1, No 1, 2020
DOI: 10.25037/cj.v1i1.3

JOURNAL OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

Super (a,d)-edge Antimagic Total Labeling of Shack(F_6, B_2, n) Graph for Developing a Polyalphabetic Cryptosystem

Arnasyitha Yulianti Soelistya[2], Dafik[1,2], Arif Fatahillah[2]
[1]CGANT- University of Jember
[2]Department of Mathematics Education - University of Jember
[3]Department of Information System - University of Jember
arnasyithays@gmail.com, d.dafik@gmail.com, fatahillah767@gmail.com

Abstract

A graph G of order p and size q is called an (a,d)-edge-antimagic total if there exist a bijection $f : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \ldots, p+q\}$ such that the edge-weights, $w(uv) = f(u) + f(v) + f(uv), uv \in E(G)$, form an arithmetic sequence with first term a and common difference d. Such a graph is called super if the smallest possible labels appear on the vertices. In this paper we study a super edge-antimagic total labeling of Shackle (F_6, B_2, n) Graph connected and we will use it to develop a polyalphabetic cryptosystem.

Kata Keywords: super edge antimagic total, polyalphabetic cryptosystem, shackle
Mathematic Subject Clasification: 05C78

Pendahuluan

Perkembangan Ilmu Pengetahuan dan Teknologi semakin menakjubkan. Seolah - olah tidak dapat dikendalikan oleh manusia, mengingat begitu cepat kemajuannya. Aplikasi dari ilmu pengetahuan yang mengembangkan teknologi pun semakin berkembang. Salah satunya adalah matematika yang merupakan dasar dari semua ilmu pengetahuan. Banyak permasalahan dan kegiatan dalam hidup kita yang harus diselesaikan dengan menggunakan ilmu matematika seperti menghitung, mengukur, dan lain-lain.

Matematika sebagai ilmu ratu dari ilmu pengetahuan yang mendasari pengembangan ilmu-ilmu lainnya, mempunyai peranan penting terhadap segala aspek kehidupan manusia, tak terkecuali dalam perkembangan kemajuan teknologi. Salah satu cabang matematika yang menarik untuk ditulis lebih lanjut adalah matematika diskrit, dalam pokok bahasan tentang pelabelan graf. Salah satu jenis tipe pelabelan graf adalah pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic (SEATL). Dalam penelitian ini akan diinvestigasi pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic pada Graf Shackle (F_6, B_2, n) konektif. Graf Shackle (F_6, B_2, n) merupakan famili dari graf kipas yang di shackle dengan graf buku sebanyak n dimana $n \geq 1$ dan n ganjil.

Pelabelan total super(a,d)-sisi *antimagic* (SEATL) adalah salah satu pengembangan kriptosistem. Kriptosistem merupakan suatu teknik di dalam menjaga keamanan data dan informasi supaya tidak dapat diketahui dan dibaca oleh pihak yang tidak berwenang [4] [6] [7] [8]. Hal ini lebih dikenal dengan nama proses enkripsi. Data atau pesan yang asli sering disebut sebagai *plaintext* dan data yang telah dienkripsi disebut sebagai *chipertext*. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui pelabelan total super(a,d)-sisi *antimagic* pada graf Shackle (F_6, B_2, n) dan penerapan dalam mengembangkan kriptosistem *polyal−phabetic.*

Lemma yang Digunakan

Dalam bagian ini disajikan lema dan proposisi penting terkait dengan pelabelan graf pada total super (a,d)-sisi antimagic untuk graf Shackle (F_6, B_2, n) konektif. Untuk mencari batas atas nilai beda d pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic dapat ditentukan dengan lemma berikut ini [4]:

Lemma 1 *Jika sebuah graf* (p,q) *adalah pelabelan total super* (a,d)*-sisi antimagic maka* $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$.

Proposisi 1 adalah proposisi untuk mengetahui bagaimana pelabelan $(a,0)$-sisi antimagic dan pelabelan $(a,2)$-sisi antimagic pada sebuah graf. Proposisi yang digunakan adalah sebagai berikut [2]:

Proposisi 1 *Jika G mempunyai pelabelan titik (a,d)-sisi antimagic maka G mempunyai pelabelan total super (a+$|V|$+1,d+1)-sisi antimagic dan pelabelan total super (a+$|V|$+$|E|$,d-1)-sisi antimagic.*

Lema 2 adalah lema untuk mengetahui bagaimana pelabelan $(a,1)$-sisi antimagic pada sebuah graf dari sebuah permutasi $\Pi(\Psi)$ dan himpunan bilangan berurutan Ψ. Lema yang digunakan adalah sebagai berikut [1]:

Lemma 2 *Misalkan* Ψ *merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan* $\Psi = \{c, c+1, c+2, \ldots, c+k\}$, *dengan k genap. Maka terdapat sebuah permutasi* $\Pi(\Psi)$ *dari anggota-anggota himpunan* Ψ *sehingga* $\Psi + \Pi(\Psi)$ *juga merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan yaitu* $\Psi + \Pi(\Psi) = \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \ldots, 2c + \frac{3k}{2}\}$.

Hasil Penelitian

Hasil penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait dengan pelabelan graf terhadap total super (a,d)-sisi antimagic graf Shackle (F_6, B_2, n) untuk

$n > 1$. Graf Shackle (F_6, B_2, n) ini dikembangkan dari graf kipas yang saling digabungkan serta dihubungkan dengan graf B_2 sebanyak n.

Jika Shackle (F_6, B_2, n) memiliki pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic untuk $p = 3n + 4$ and $q = 6n + 5$, berdasarkan lema 1 batas atas nilai d adalah $d \leq 2$ atau $d \in \{0, 1, 2\}$. Teorema 1 adalah teorema yang berkaitan dengan pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antimagic pada graf Shackle (F_6, B_2, n).

$\diamond$ **Teorema 1** *Ada pelabelan titik* $(3, 1)$*-sisi antimagic pada graf Shackle* (F_6, B_2, n) *untuk* $n > 1$.

Bukti. Labeli titik graf Shackle (F_6, B_2, n) dengan fungsi bijektif f_1 yang didefinisikan sebagai pelabelan $f_1 : V(F_6, B_2, n) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 3n + 4\}$ maka pelabelan f_1 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{lcll} f_1(x_i) & = & 3i - (\frac{1-(-1)^i}{2}), & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1 \\ f_1(y_i) & = & 3i - 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+2 \\ f_1(z_i) & = & 3i - (\frac{1+(-1)^i}{2}), & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1 \end{array}$$

Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan titik f_1 dimana bobot sisi pelabelan titik diperoleh dari penjumlahan 2 buah label titik yang bersisian. Maka bobot sisi w_{f_1} adalah sebagai berikut:

$$\begin{array}{lcll} w^1_{f_1}(x_i x_{i+1}) & = & 6i + 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ w^2_{f_1}(y_i y_{i+1}) & = & 6i - 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1 \\ w^3_{f_1}(x_i y_i) & = & 6i - 2 - (\frac{1-(-1)^i}{2}), & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1 \\ w^4_{f_1}(x_i y_{i+1}) & = & 6i + (\frac{1+(-1)^i}{2}), & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1 \\ w^5_{f_1}(y_i z_i) & = & 6i - 2 - (\frac{1+(-1)^i}{2}), & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1 \\ w^6_{f_1}(y_{i+1} z_i) & = & 6i + (\frac{1-(-1)^i}{2}), & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1 \end{array}$$

Berdasarkan bobot sisi EAV di atas, bobot sisi terkecil terletak pada $w^3_{f_1}$ yaitu $6i - 2 - (\frac{1-(-1)^i}{2})$ untuk $i = 1$, bobot sisi terkecil kedua terletak pada $w^5_{f_1}$ yaitu $6i - 2 - (\frac{1+(-1)^i}{2})$ untuk $i = 1$, da seterusnya sehingga diperoleh rangkaian bilangan dengan bobot sisi terbesar terletak pada $w^4_{f_1}(x_i y_{i+1})$ yaitu $6i + (\frac{1+(-1)^i}{2})$ untuk $i = n + 1$. Dengan mensubstitusikan fungsi yang bergerak, $1 \leq i \leq n + 1$ maka didapatkan nilai-nilai berurutan dengan suku awal 3 yang didapat dari subtitusi nilai $i = 1$ pada $w^3_{f_1}$. Beda setiap rangkaian tersebut adalah 1, sehingga dapat ditulis dalam himpunan $w_{f_1} = \{3, 4, 5, \ldots, \frac{12n+13+(-1)^{n+1}}{2}\}$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa f_1 adalah suatu pelabelan titik $(3, 1)$.

◇ **Teorema 2** *Ada pelabelan total super* $(9n + 12, 0)$*-sisi antimagic dan* $(3n + 8, 2)$*-sisi antimagic pada graf Shackle* (F_6, B_2, n) *untuk* $n > 1$.

Bukti. Pada kasus ini dibagi menjadi dua kasus yakni $d = 0$ dan $d = 2$.
Kasus 1 $(d = 0)$
Gunakan pelabelan titik f_1 untuk melabeli titik graf Shackle (F_6, B_2, n). Berdasarkan Proposisi 1 yaitu pelabelan total super $(a+|V|+|E|, d-1)$-sisi antimagic yang berarti jika suatu graf memiliki beda untuk label titiknya 1 maka graf tersebuut memiliki $a = a + |V| + |E|$. Dengan melengkapi label sisi $p + 1, p + 2, p + 3, \ldots, p + q$ definisikan label sisi f_2 untuk pelabelan total super $(a, 0)$-sisi antimagic pada graf Shackle $(F_6, B_2, 5)$, dimana $|V| = 3n + 4, |E| = 6n + 5$, dan berdasarkan Teorema 1 dengan $a = 3$ sehingga didapat a untuk $d = 0$ yaitu $a = a + |V| + |E| = 3 + 3n + 4 + 6n + 5 = 9n + 12$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa graf Shackle (F_6, B_2, n) mempunyai pelabelan total super $(9n + 12, 0)$-sisi antimagic untuk $n > 1$.
Kasus 2 $(d = 2)$
Berdasarkan Proposisi 1 yaitu pelabelan total super $(a + |V| + 1, d + 1)$-sisi antimagic yang berarti jika suatu graf memiliki beda untuk label titiknya 1 maka graf tersebuut memiliki $a = a + |V| + 1$. Dengan melengkapi label sisi $p + 1, p + 2, p + 3, \ldots, p + q$ definisikan label sisi f_3 untuk pelabelan total super $(a, 2)$-sisi antimagic pada graf Shackle (F_6, B_2, n), dimana $|V| = 3n + 4, |E| = 6n + 5$, dan berdasarkan Teorema 1 dengan $a = 3$ sehingga didapat a untuk $d = 2$ yaitu $a = a + |V| + 1 = 3 + 3n + 4 + 1 = 3n + 8$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa graf Shackle (F_6, B_2, n) mempunyai pelabelan total super $(3n + 8, 2)$-sisi antimagic untuk $n > 1$.

Berdasarkan kedua pembuktian di atas maka dapat disimpulkan bahwa ada pelabelan total super $(9n+12, 0)$-sisi antimagic dan $(3n+8, 2)$-sisi antimagic pada graf Shackle (F_6, B_2, n) untuk $n > 1$.

◇ **Teorema 3** *Ada pelabelan total super* $(\frac{24n+39+(-1)^{n+1}}{4}, 1)$*-sisi antimagic pada graf Shackle* (F_6, B_2, n) *untuk* $n > 1$.

Bukti. Berdasarkan Teorema 1 bahwa graf Shackle (F_6, B_2, n) memiliki pelabelan titik $(3, 1)$-sisi antimagic untuk $n > 1$, dengan $p = 3n + 4$ dan $q = 6n+5$. Hal ini berarti graf Shackle (F_6, B_2, n) memiliki himpunan bobot sisi berdasarkan pelabelan titik f_1 yang dinyatakan dalam $\{3, 4, 5, \ldots, \frac{12n+13+(-1)^{n+1}}{2}\}$, dengan kata lain graf Shackle (F_6, B_2, n) memiliki barisan bobot sisi dengan nilai awal $a = 3$ dan beda tiap sukunya adalah 1.

Jika dimisalkan barisan bobot sisi graf Shackle (F_6, B_2, n) dinyatakan dalam $\Upsilon = \{c, c+1, c+2, \ldots, c+s\}$ maka diperoleh nilai $c = 3$ dan $s = \frac{12n+7+(-1)^{n+1}}{2}$.

Berdasarkan Lema 2, $\Pi(\Upsilon)$ adalah permutasi nilai Υ sedemikian hingga nilai $\Upsilon+(\Pi(\Upsilon)-c+p+1)=\{c+\frac{s}{2}+p+1, c+\frac{s}{2}+p+2,\ldots,c+\frac{s}{2}+p+q\}$ merupakan barisan aritmatik.

Didefinisikan label titik $f_4(x_i)=f_1(x_i); f_4(y_j)=f_1(y_j); f_4(z_i)=f_1(z_i)$ dan $f_4(F_6,B_2,n)=(\Pi(\Upsilon)-c+p+1)$ sebagai label sisi dari graf Shackle (F_6,B_2,n). Sehingga $\Upsilon+(\Pi(\Upsilon)-c+p+1)$ dapat dinyatakan dalam himpunan $\{\frac{24n+39+(-1)^{n+1}}{4}$, $\frac{24n+43+(-1)^{n+1}}{4}, \frac{24n+47+(-1)^{n+1}}{4},\ldots,\frac{48n+55+(-1)^{n+1}}{4}\}$. Sehingga terbukti bahwa graf Shackle (F_6,B_2,n) memiliki pelabelan super $(\frac{24n+39+(-1)^{n+1}}{4}$, 1)-sisi antimagic total untuk $n>1$.

Peneliti menggunakan pelabelan SEATL dari graf Shackle $(F_6,B_2,4)$ untuk menentukan *ciphertext* dari huruf-huruf alfabet yang membutuhkan sisi sebanyak 26 karena jumlah huruf alfabet $a-z$ adalahh 26, maka perlu menggunakan graf Shackle (F_6,B_2,n) dengan $n=4$ yang memiliki 29 sisi diperoleh dengan cara menghitung size q graf Shackle $(F_6,B_2,4)$ tersebut. Huruf-huruf alfabet berjumlah 26, namun sisi pada graf Shackle $(F_6,B_2,4)$ adalah 29 sisi. Oleh karena itu, pengeliminasian sisi perlu dilakukan agar tidak ada kode yang berulang.

Metode atau cara pengeliminasian sisi untuk beda (d) 0, 1, dan 2 adalah sama. Dengan cara menjumlah titik pada graf Shackle $(F_6,B_2,4)$ dan jumlah huruf alfabet dari $a-z$. Jumlah titik pada graf Shackle $(F_6,B_2,4)$ yaitu 16, sedangkan jumlah huruf alfabet yaitu 26. Jadi, diiperoleh hasil 42 dari penjumlahan titik dan huruf alfabet tersebut. Sehingga, pengeliminasian sisi pada graf Shackle $(F_6,B_2,4)$ yaitu pada sisi yang memiliki label yang lebih besar dari 42. Pengeliminasian sisi pada graf Shackle $(F_6,B_2,4)$ dilakukan pada label sisi 43, 44, dan 45 karena graf Shackle $(F_6,B_2,4)$ memiliki himpunan label sisi {17,18,19,...,44, 45}.

Kasus 1 $(d=0)$

Pada kasus pertama yaitu menggunakan SEATL graf Shackle $(F_6,B_2,4)$ dengan $d=0$. Kemudian didata semua huruf alfabet dengan mengabaikan spasi dan tanda baca yaitu a, b, c, d, e, ..., z. Setelah itu dibangun diagram pohon yang berakar pada label titik yang paling kecil dengan dilengkapi label sisinya dan konversikan huruf yang digunakan sesuai urutan abjad. (Label sisi yang telah dieliminasi tidak perlu digambarkan pada diagram pohon)

Letakkan huruf alfabet $a-z$ pada cabang diagram pohon yang telah dibangun. Penempatan alfabet ini harus berurutan dari kiri ke kanan dimulai dari layer pertama yaitu dimulai dari label sisi 42, 40, 41, dst sampai label sisi kanan paling bawah yaitu label sisi 17. Setelah penempatan alfabet pada cabang diagram pohon, pesan rahasia dipecahkan dengan menerapkan teknik modulo 26 yaitu menghitung nilai modulo dari setiap cabang atau label sisi sesuai letak alfabet. Sehingga, didapatkan *chipertext* dari huruf alfabet pada SEATL Graf Shackle $(F_6, B_2, 4)$ dengan $d = 0$ yaitu a=q, b=o, c=p, d=n, e=m, f=l, g=j, h=i, i=k, j=h, k=g, l=f, m=e, n=c, o=d, p=b, q=a, r=z, s=x, t=w, u=y, v=v, w=u, x=t, y=s, dan z=r.

Kasus 2 $(d = 1)$

Pada kasus kedua yaitu menggunakan SEATL graf Shackle $(F_6, B_2, 4)$ dengan $d = 1$. Dengan cara yang sama pada kasus 1 didapat diagram pohon dari graf Shackle $(F_6, B_2, 4)$ dengan $d = 1$ yang berakar pada label titik yang paling kecil dengan dilengkapi label sisinya dan konversikan huruf yang digunakan sesuai urutan abjad.. (Label sisi yang telah dieliminasi tidak perlu digambarkan pada diagram pohon)

Dengan cara yang sama pada kasus 1, penempatan alfabet harus berurutan dari kiri ke kanan dimulai dari layer pertama yaitu dimulai dari label sisi 31, 30, 29, dst sampai label sisi kanan paling bawah yaitu label sisi 17.

Setelah penempatan alfabet pada cabang diagram pohon, pesan rahasia dipecahkan dengan menerapkan teknik modulo 26 yaitu menghitung nilai modulo dari setiap cabang atau label sisi sesuai letak alfabet. Sehingga, didapatkan *chipertext* alfabet pada SEATL Graf Shackle $(F_6, B_2, 4)$ dengan $d = 1$ yaitu a=f, b=e, c=d, d=c, e=q, f=b, g=p, h=a, i=o, j=z, k=n, l=y, m=m, n=l, o=x, p=w, q=k, r=v, s=u, t=i, u=j, v=t, w=h, x=s, y=g, dan z=r.

Kasus 3 $(d = 2)$

Pada kasus ketiga yaitu menggunakan SEATL graf Shackle $(F_6, B_2, 4)$ dengan $d = 2$. Dengan cara yang sama pada kasus 1 dan 2 didapat diagram pohon dari graf Shackle $(F_6, B_2, 4)$ dengan $d = 2$. (Label sisi yang telah dieliminasi tidak perlu digambarkan pada diagram pohon)

Dengan cara yang sama pada kasus 1 dan 2, penempatan alfabet harus berurutan dari kiri ke kanan dimulai dari layer pertama yaitu dari label sisi 17, 18, 19, dst sampai label sisi kanan paling bawah yaitu label sisi 42.

Setelah penempatan alfabet pada cabang diagram pohon, pesan rahasia dipecahkan dengan menerapkan teknik modulo 26 yaitu menghitung nilai modulo dari setiap cabang atau label sisi sesuai letak alfabet. Sehingga, didapatkan *chipertext* alfabet dari SEATL Graf Shackle $(F_6, B_2, 4)$ dengan $d = 2$ yaitu a=r, b=s, c=t, d=u, e=w, f=v, g=x, h=y, i=z, j=b, k=c, l=a, m=d, n=e, o=f, p=g, q=i, r=h, s=j, t=k, u=l, v=n, w=o, x=m, y=p, dan z=q.

Berdasarkan ketiga kasus diatas, dengan metode modulo 26 pada masing-masing cabang atau label sisi didapatkan *chipertext* yang berbeda-beda atau unik. Sehingga, *chipertext* tersebut dapat digunakan untuk pesan rahasia apapun.

Kesimpulan

Pada makalah ini telah terbukti bahwa

- Graf Shackle (F_6, B_2, n) konektif memiliki pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic untuk $d = 0, 1, 2$. Ada pelabelan total super $(9n + 12, 0)$, dan $(3n + 8, 2)$-sisi antimagic jika $n > 1$. Ada pelabelan total super $(\frac{24n+39+(-1)^{n+1}}{4}, 1)$-sisi antimagic jika $n > 1$.
- *Ciphertext polyalphabetic* (26 huruf alfabet) pada SEATL graf Shackle $(F_6, B_2, 4)$ dengan $d = 0$ yaitu a=q, b=o, c=p, d=n, e=m, f=l, g=j, h=i, i=k, j=h, k=g, l=f, m=e, n=c, o=d, p=b, q=a, r=z, s=x, t=w, u=y, v=v, w=u, x=t, y=s, dan z=r. Dengan $d = 1$ yaitu a=r, b=s, c=t, d=u, e=w, f=v, g=x, h=y, i=z, j=b, k=c, l=a, m=d, n=e, o=f, p=g, q=i, r=h, s=j, t=k, u=l, v=n, w=o, x=m, y=p, dan z=q. Serta untuk $d = 2$ yaitu a=r, b=s, c=t, d=u, e=w, f=v, g=x, h=y, i=z, j=b, k=c, l=a, m=d, n=e, o=f, p=g, q=i, r=h, s=j, t=k, u=l, v=n, w=o, x=m, y=p, dan z=q.

Referensi

[1] Adawiyah, R. 2014.*Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic pada Graf Lampion.* (Vol.6 No.1)

[2] Baca, Martin, et al. 2014.*On Super (a, 2)-Edge-Antimagic Total Labeling Of Disconnected Graphs.* Ars Comb. 113: 129-137.

[3] Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graph* (Doctoral dissertation, University of Ballarat).

[4] Dafik. 2015. *Pidato Ilmiah Pengukuhan Guru Besar.* Jember: Repository UNEJ.

[5] Miller, M., Ryan, J., and Baca, M. *On super (a, d)-edge-antimagic total labeling of disconnected graphs.* Discrete Mathematics 309.15 (2009): 4909-4915.

[6] Muktyas, Indra Bayu, and Kiki A. Sugeng. *Pemanfaatan Pelabelan Graceful pada Symmetric Tree untuk Kriptografi Polyalphabetic.* Institute Teknologi Sepuluh November (ITS). 2014.

[7] Ongko, Erianto. 2013. *Aplikasi Pembelajaran Kriptografi Klasik dengan Visual Basic .NET*. Medan: STMIK IBBI.

[8] Palupi, Retno. 2008. *Kriptosistem Kunci Asimetrik Menggunakan Algoritma Genetika Pada Data Citra.* (Vol 1 No 1).

[9] Pearson, E. 2006. *Introduction To Cryptography With Coding Theory.* America: United States of America.